**BELMANTO 2024 – SOLUZIONI**

**1**.- Un tale numero naturale $n < 1000$ deve potersi esprimere così: $n = p \cdot q \cdot r$ , con $p$, $q$, $r$ primi, $p < q < r$ , $r = p + q$. Ovviamente $r$ è dispari e quindi $p = 2$, $r = 2 + q$ . Quindi i tre numeri primi sono: 2, $q$, $q + 2$ . Vi sono solo queste possibilità:

| $q$ | $r$ | $n$ |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 30 |
| 5 | 7 | 70 |
| 11 | 13 | 286 |
| 17 | 19 | 646 |

Risposta: 30 + 70 + 286 + 646 = **1032**.

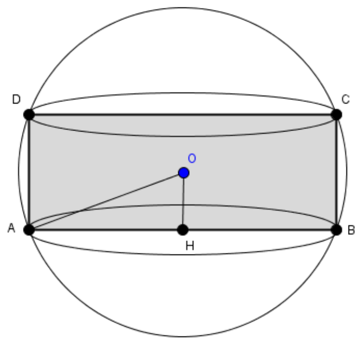
**2**.- Occorre considerare i divisori di $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Quindi si presentano queste possibilità:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x=2024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2023 \\ x=2024 \end{cases}; \begin{cases} x-y=2 \\ x=1012 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1010 \\ x=1012 \end{cases}; \begin{cases} x-y=4 \\ x=506 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=502 \\ x=506 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=8 \\ x=253 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=245 \\ x=253 \end{cases}; \begin{cases} x-y=11 \\ x=184 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=173 \\ x=184 \end{cases}$$

Risposta: 2023 + 1010 + 502 + 245 + 173 = **3953**.

**3**.- Sia $O$ il centro della sfera $S$ e $H$ la proiezione ortogonale di $O$ su una base del cilindro inscritto avente sezione $ABCD$ (vedi figura). Poniamo $OH = x$ , con $0 < x < 10$. Risulta $AH = \sqrt{100 - x^2}$ e il volume del cilindro:
$V = \pi \cdot AH^2 \cdot 2OH = 2\pi x \cdot (100 - x^2) = 2\pi (x^2)^{1/2} \cdot (100 - x^2)$. Essendo $x^2 + (100 - x^2) = 100$, quindi costante, risulta che $V$ è massimo se $x^2 : \frac{1}{2} = (100 - x^2) : 1$ ; da cui $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.




Il volume del cilindro massimo è $V_C = 4000\sqrt{3}\pi/9$ cm³; il volume della sfera è $V_S = 4000\pi/3$ cm³.
La probabilità richiesta risulta: $p = \frac{V_C}{V_S} = \sqrt{3}/3$.

Risposta: $p \cdot \sqrt{10800} = \mathbf{60}$.
*N.B.* Il problema può essere risolto anche con l'uso delle derivate.

**4**.- Se $r, s, t$ sono le radici di $p(x)$ , risulta che: $p(x) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst$. Quindi: $b = -(r+s+t); c = rs+rt+st; d = -rst$. Inoltre: $r^2+s^2+t^2 = (r+s+t)^2 - 2(rs+rt+st)$; da cui:

$$\begin{cases} b^2 - 2c = 38 \\ b^3 = -64 \\ d = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = -11 \\ d = 30 \end{cases} \Rightarrow p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$$

Risposta: $p(8)$ = **198**.

**5**.- Per il teorema del coseno (o di Carnot): $cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{30^2+20^2-(10\sqrt{19})^2}{2 \cdot 30 \cdot 20} = -\frac{1}{2}$ ; allora $\alpha = 120°$.

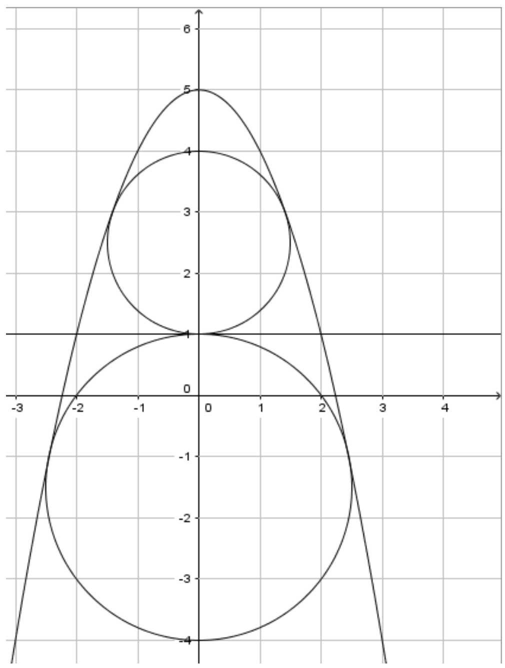
Per il teorema della corda (o dei seni) il raggio della circonferenza circoscritta: $R = \frac{a}{2sin\alpha} = \frac{10\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$ cm .

Da cui $R^2 = \frac{1900}{3}$ cm². Risposta: 1900 + 3 = **1903**.
*N.B.* Il problema può essere risolto anche con l'uso della formula di Erone per trovare l'area del triangolo ABC:
$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 150\sqrt{3}$ cm². Da cui $R = \frac{abc}{S_{ABC}} = \frac{10\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$ cm e così via.

**6**.- Le circonferenze richieste, per ragioni di simmetria, devono avere i centri sull'asse $y$; quindi hanno equazioni del tipo
$x^2 + y^2 + by + c = 0$ , essendo $a = 0$.
La tangenza con la retta di equazione $y = 1$ , sostituendo 1 al posto di $y$, è espressa da $\Delta = -4 - 4b - 4c = 0$.
La bitangenza alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$, sostituendo $5 - y$ al posto di $x^2$, è data dalla condizione:
$\Delta = (c + 2)^2 - 4(5 + c) = 0$.
Da cui:

$$\begin{cases} b + c + 1 = 0 \\ c^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \vee b = -5 \\ c = \pm 4 \end{cases}.$$

Ottengo quindi le equazioni delle due circonferenze:
$x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0$ , $x^2 + y^2 - 5y + 4 = 0$ , di raggi 5/2 e 3/2.
Risposta: (5/2 + 3/2)·1000 = **4000**.




**7**.- Considero la serie convergente: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ . Si usano le serie geometriche.

La somma parziale dei termini di posto pari: $S'_n = \frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^1} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}$ tende a 4/3 per $n$ tendente a infinito.

La somma parziale dei termini positivi di posto dispari: $S"_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}$ tende a 2/3 per $n$ tendente a infinito. Quindi: $S = S' - S" = 2/3$.
Risposta: $2022 \cdot S$ = **1348**.

**8**.- Sia $a$ una qualsiasi radice. Allora si ha $a^{24} = 36a^2 + 144a + 144$. Così basta conoscere la somma delle radici e dei loro quadrati, dal momento che la somma dei quadrati delle radici è data dal quadrato della somma delle radici, privato di 2 volte la somma di tutti i possibili loro prodotti a due a due. Per le relazioni radici-coefficienti di un polinomio, la somma delle radici è data dall'opposto del coefficiente di $x^{11}$ e la somma dei prodotti a due a due di radici corrisponde al coefficiente di $x^{10}$. Ma questi coefficienti non compaiono nell'equazione data, quindi il risultato è 12·144=1728. Risposta **1728**.

**9**.- Risolviamo l'equazione diofantea $97x + 21y = 1$ con l'algoritmo di Euclide, ottenendo la soluzione (-8,37). Le altre soluzioni sono della forma $(-8 - 21k, 37 + 97k)$, quindi 37 è il minimo richiesto. Risposta **37**.

**10**.- Osserviamo che 2 risolve le prime due congruenze, quindi è sufficiente determinare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 15) \\ x \equiv 6 \ (mod\ 7) \end{cases}$$

Conviene scrivere $x = 15A + 7B$ per opportuni interi $A$ e $B$ e abbiamo

$$\begin{cases} 7B \equiv 2 \ (mod\ 15) \Leftrightarrow -B \equiv 4 \ (mod\ 15) \\ 15A \equiv A \equiv 6 \ (mod\ 7) \end{cases}$$

Quindi una soluzione $(A, B)$ è data da $A = 6, B = -4$, che fornisce l'intero richiesto $x = 62$. Risposta **62**.

**11**.- La prima equazione non ha soluzioni intere, dal momento che $7 = MCD(21,35)$ non divide 3. La seconda equazione ha (ad esempio tramite algoritmo di Euclide) soluzioni della forma $(z, t) = (-6,10)$, quindi la soluzione generale è $(-6 - 14k, 10 + 23k)$, da cui otteniamo che $z + t = 9k + 4$, e, per $k = 225$ si ottiene $|z + t - 2025| = 4$. La risposta è quindi **2029**.

**12**.- L'espressione si può scrivere come $\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+4^2}+\sqrt{(21-y)^2+16^2}$

e rappresenta la lunghezza della congiungente i punti $A=(1,1), B=(x,2), C=(y,6), D=(21,22)$, minima quando sono allineati sul segmento $AD$, di lunghezza 29. Risposta **29**.

**13**.- Osserviamo che $105 = 3\cdot 5\cdot 7$. La massima potenza di 105 che divide 2024! corrisponde alla massima potenza di 7 che lo divide e si ottiene tramite valutazione 7-adica di 2024!:

$V_7(2024!) = \left\lfloor\frac{2024}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2024}{7^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2024}{7^3}\right\rfloor = 289 + 41 + 5 = 335$. Risposta **335**.

**14**.- Dalle relazioni radici-coefficienti, la somma delle radici è 20 e dalla disuguaglianza AM-GM abbiamo

$$4 = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon}{5} \geq \sqrt[5]{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$$

da cui il massimo di $|p(0)|$ è $3\cdot 4^5 = 3072$. Risposta **3072**.

**15**.- Sia $n$ il numero di vertici e $k \geq 2$ il passo. Affinché la stella si chiuda, è necessario che *MCD(n,k)*=1. Inoltre, se $n$ è primo, per il passo $k'$=$n$-$k$ si ottiene la stessa stella, così $k$ può variare solamente tra 2 e $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Se $n$ non è primo (come nel caso di 2024), il numero di stelle è dato dal numero di interi $k$ compresi strettamente tra 1 e $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ che sono coprimi con $n$. Questo numero si ricava dalla funzione $\phi$ di Eulero, ovvero come

$\frac{\phi(2024)}{2} - 1 = 439$ perché, essendo $2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$, si ha
$\phi(2024) = 2024\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{23}\right) = 880.$
Risposta **439**.

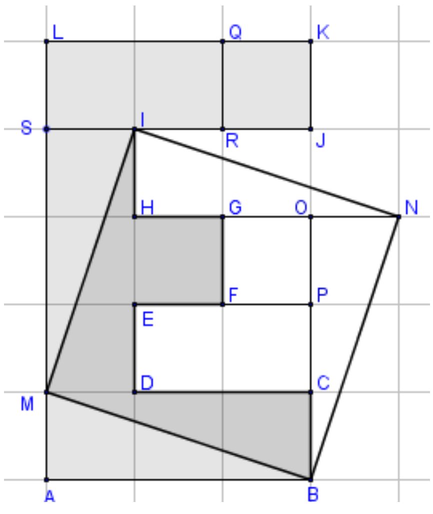
**16**.- Connettiamo i punti e contiamo quanti triangoli si formano in due modi.

A ciascun punto interno corrisponde un angolo di 360°, mentre la somma degli angoli interni del poligono iniziale (di 8 lati) è 6·180°.

Ma sappiamo che la regione è perfettamente divisa in $n$ triangoli, quindi la stessa somma si può esprimere come 180° ·$n$. Da questo si ha $n = \frac{360\cdot 492+180\cdot 6}{180} = 990$.
Per contare il numero di filamenti, osserviamo che, una volta tolti i lati dell'ottagono, questo corrisponde a 3 volte il numero dei triangoli formati, diviso 2 dato che ogni segmento congiungente due semi (diverso dai lati dell'ottagono) viene contato 2 volte. Dovremo infine aggiungere i lati dell'ottagono. Quindi si ha $k = (3n-8)/2+8 = 1489$.
Risposta **1489**.

**17**.- Osserviamo che $\frac{n^3-5n^2+9n-1}{n-3} = \frac{(n-3)^3+4n^2-18n+26}{n-3}$, quindi l'espressione è intera se e solo se è intero $\frac{4n^2-18n+26}{n-3} = \frac{4n(n-3)-6n+26}{n-3}$, ovvero $\frac{-6(n-3)+8}{n-3}$. I valori ammissibili di $n$ sono quindi precisamente quelli per cui $n-3$ divide 8, ovvero -5,-1,1,2,4,5,7,11. Risposta **36**.

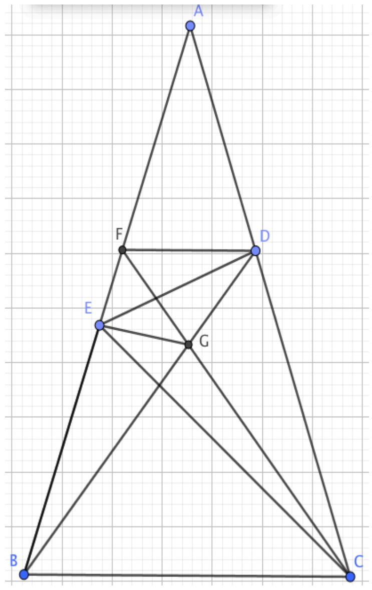
**18**.- La lettera "**E**" in figura è il dodecagono concavo *ABCDEFGHIJKL* che è equivalente al quadrato *BNIM* ottenuto ricomponendo con sole traslazioni i poligoni in cui il dodecagono di partenza era stato suddiviso.
Essendo $AB$ = 36 cm, $BC = ED = EF = FG = GH = HI$ = 12 cm, $DC$ = 24 cm, $BM = MI = 12\sqrt{10}$ cm , come si vede in figura, il 9-agono *BCDEFGHIM* ha perimetro pari a: $(96 + 24\sqrt{10})$ cm.
Risposta: 96 + 24 + 10 = **130**.



**19**.- Fissiamo le 3 consonanti, possiamo farlo in 3!=6 modi. Le vocali si possono invece disporre in 3!/2=3 modi, a causa della ripetizione della O. Per le richieste del problema, necessariamente ci deve essere almeno una vocale tra la prima e la seconda consonante, così come tra la seconda e la terza. Lo spazio prima della prima consonante può essere vuoto, così come quello dopo la terza consonante. Con evidente significato dei simboli, si osserva che ci sono 4 configurazioni lecite: CVCVCV, VCVCVC, CVVCVC, CVCVVC.

Il numero di parole è quindi $6 \cdot 3 \cdot 4 = 72$. Risposta **72**.

**20**.- Sia *DF* parallela a *BC* come in figura. Sia *G* il punto di incontro tra *CF* e *BD*. Per costruzione, *BCG* e *FGD* risultano equilateri, in particolare *BG*=*BC*. Inoltre *CBE* è isoscele avendo due angoli uguali, così *BE*=*BC*. Quindi *BG*=*BE* e *BGE* è isoscele, in particolare: $B\hat{G}E = 80°, F\hat{G}E$=40°. Dal trapezio isoscele *BCDF* si ottiene $E\hat{F}G$=40°, così il triangolo *FEG* risulta isoscele con *FE*=*EG*. Ma anche *DFG* è equilatero, quindi *DF*=*DG*. Così si ha $G\widehat{D}E$=$F\widehat{D}E$, in particolare *DE* risulta la bisettrice di $G\widehat{D}F$, così $E\widehat{D}F$=30° e $E\widehat{D}A$=110°.
Risposta **110**.




| *quesito* | *risposta* |
|---|---|
| 1 | 1032 |
| 2 | 3953 |
| 3 | 0060 |
| 4 | 0198 |
| 5 | 1903 |
| 6 | 4000 |
| 7 | 1348 |
| 8 | 1728 |
| 9 | 0037 |
| 10 | 0062 |
| 11 | 2029 |
| 12 | 0029 |
| 13 | 0335 |
| 14 | 3072 |
| 15 | 0439 |
| 16 | 1489 |
| 17 | 0036 |
| 18 | 0130 |
| 19 | 0072 |
| 20 | 0110 |